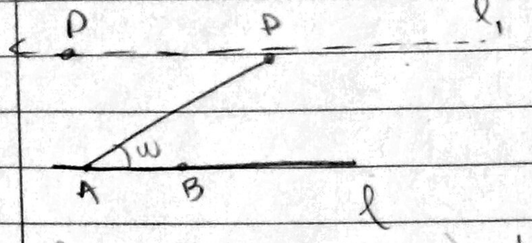
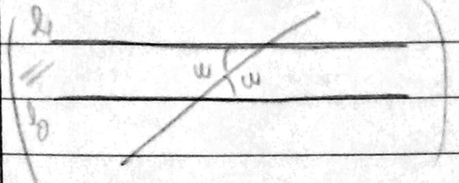
① **Πρόταση** (Αποτυπη Γεωμετρια) Έστω l ευθεία, $p \notin l \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον 1 παράλληλη στην l από το p



$\omega = P\hat{A}B$ γωνία (P, A, B όχι συνευθειακά)



Από το I_4) μεταφέραμε την $\omega = P\hat{A}B$ σε γωνία $A\hat{P}D$

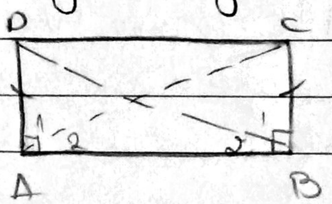
② **Τετράπλευρο Saccheri**

Ορίζεται το εξής:

$\hat{A} = 1\llcorner$

$\hat{B} = 1\llcorner$

$AD = BC$



Θδο με αυτά τα δεδομένα $\hat{D} = \hat{C}$.

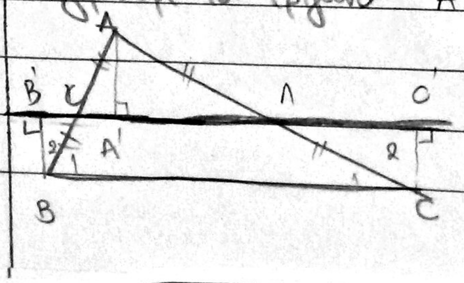
$\overset{\triangle}{ADB} = \overset{\triangle}{ACB}$???

AB κοινή, $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$, $AD = BC$ $\Big\} \Rightarrow AC = BC$ (2) (3) $AD = BC$

$\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_2$

$\overset{\text{Θδο}}{\Rightarrow} \hat{B}_1 = \hat{A}_1$ (1) (από διαφορά γωνιών)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ACD}, \overset{\triangle}{BDC}$ (πλευρές ίσες) $\Rightarrow \underline{\hat{D} = \hat{C}}$



BB' $C'C$

$B'B \overset{?}{=} C'C$

K, Λ μέσο των AB, AC

• $A\hat{A}'K = B\hat{B}'K$ [ορθογώνια, ίσες υποτείνουσες, 2 κατακορυφήν (γωνίες ίσες)]

Άρα $BB' = AA'$

·Παρόμοια: $A\hat{A}'\Lambda = A\hat{C}'C \Rightarrow C'C = AA' = BB'$

$W(A\hat{B}C)$ το άθροισμα των γωνιών του $A\hat{B}C = \hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1$

Επίσης $\left.\begin{array}{l}\hat{B}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{C}_2 = \hat{A}_2\end{array}\right\}$ (1)

$\hat{B} + \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + (\hat{B}_2 + \hat{C}_2) \overset{(1)}{=} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$

$\Rightarrow W = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{A}$

$W = W(A\hat{B}C) = \hat{B} + \hat{C}$ [$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$ & $\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2$]

$= 2(\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 2\hat{B}$ ($\hat{B} = \hat{C}$)

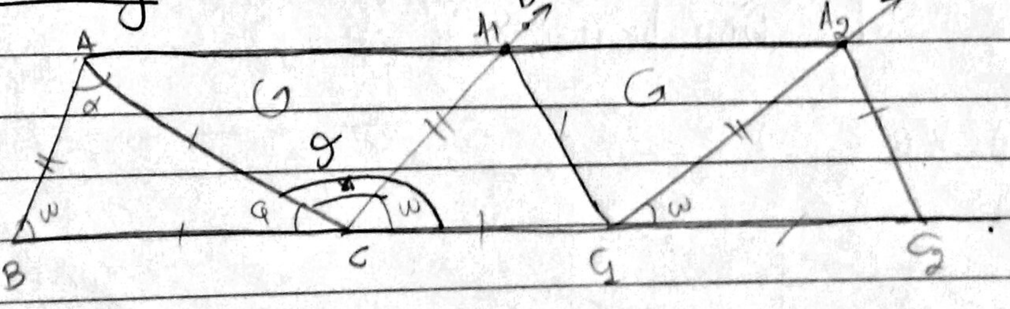
$W \leq 2L$
Υ.Γ
Γ. Απολ →

1) $\hat{B}$ οξεία $W < 2L$
2) $\hat{B} = 1L \Rightarrow W = 2L$ } Δεν καταρρίπτεται στην απόλυτη γεωμετρία
3) $\hat{B} > 1L$ (αμβλεία) $\rightarrow W > 2L$

Αν καταρρίψω την (3) τότε πηγαίνω στην Ευκλείδεια

Θεώρημα Στην απόλυτη Γεωμετρία αν $A\hat{B}C$ τρίγωνο $W = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \leq 2L$

Απόδειξη



$\rightarrow \hat{A} + \hat{\omega} + \hat{\varphi} \leq 2L$ $\quad \exists C_1 \not\sim B$, $C_1 \in (BC$ ώστε $BC = CC_1$

A' εσωτερικό της γωνίας θ

Αρκεί νδο $\omega < \theta$ (Τότε $\overrightarrow{CA_1}$ εσωτερική της $\theta \rightarrow A_1$ εσωτ. της θ)

$\theta > \omega$, ως εξωτερική στο $A\hat{B}C$

$A\hat{B}C = A_1\hat{C}C_1$ (από το 1ο Κριτήριο)

A, A_1, A_2, A_3 όχι απαραίτητα συνευθειακά

Ορίζουμε τα $C\hat{A}A_1$ & $C_1\hat{A}_1A_2$ (ΙΣΑ) → $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$

$A_1\hat{C}_1A_2 = \hat{\gamma}_1 = A\hat{C}A_1$ (ως διαδοχικές διαφ. γωνιών)

Ισχύει $\hat{\gamma}_1 \ge \hat{\alpha}$ (Τότε $\hat{\alpha} + \hat{\omega} + \hat{\varphi} = W(A\hat{B}C) \le \hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{\gamma}_1 = 2L$)

Ας υποθέσουμε ότι όχι $\hat{\gamma}_1 \ge \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\gamma}_1 < \hat{\alpha} \Rightarrow BC > AA_1 \Rightarrow AA_1 < BC$

$A\hat{B}C$ $(AB + AC > BC)$

$BA + AA_1 + A_1C_1 > BC_1 := 2BC$

$AB_1 + A_1C_1 > BC_1 = 2BC$

$A_2C_2 + AB + 2AA_1 > 3BC$

$A_nC_n + AB + nAA_1 > (n+1)BC$

$(AB + AC) + nAA_1 > (n+1)BC$ (1)

$BC > AA_1$

Αξίωμα Συνέχειας ΣΔ : Δίνεται $A \ne B$, $\overline{AB}$ ευθ. τμήμα

$A * A_1 * A_2$, $A_1 * A_2 * A_3$, …, $A_i * A_{i+1} * A_{i+2}$ Επιπλέον, $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$ $= AA_1$, $\forall i$. Συμπέρασμα: $\exists i = 4$: $A * B * A_4$.

$BC > AA_1$

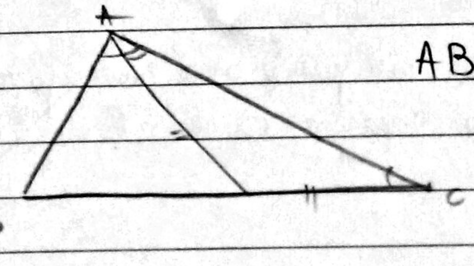
Η (1) γράφεται:

$AB + AC + nAA_1 > nBC + BC$

$AB + AC > n(BC - AA_1) + BC$, $\forall n = 1, 2, \dots$

$\hat{\gamma}_1 \ge \hat{\alpha} \Rightarrow W(A\hat{B}C) \le 2L$

Λήμμα :



$AB < BC + AC$

Θα βρούμε D στην προέκταση του BC προς το C ώστε $CD = AC$

$\Rightarrow BC + AC = BC + CD = BC$

Θεωρούμε το τρίγωνο $A\hat{B}D$

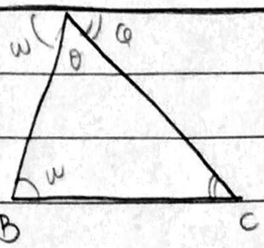
$B\hat{A}D > A\hat{D}B$

Εφόσον $B * C * D \Rightarrow C$ εσωτερικό στη $B\hat{A}D$

$A\hat{C}D$ ισοσκελές

$\Rightarrow A\hat{D}B = C\hat{A}D < B\hat{A}D \overset{\text{άτοπο}}{\Rightarrow} (1)$

Ευκλείδεια Γεωμετρία $\Longrightarrow \omega(A\hat{B}C) = 2L$

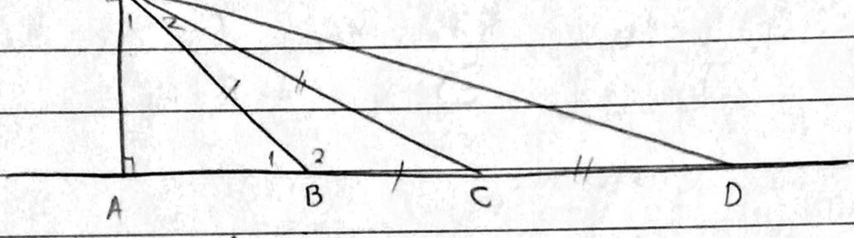


$A \in l$, $l \parallel BC$, l: μοναδική

Θεώρημα: Αν $\forall$ τρίγωνο $A\hat{B}C$, $\omega(A\hat{B}C) = 2L \Rightarrow$ ισχύει το αίτημα (αξίωμα) παραλληλίας

Απόδειξη

Θδο αν ευθεία, $p \notin l \Rightarrow \exists!$ μοναδική $l_1 \ni p$, $l_1 \parallel l$



$A \neq B$, $\hat{B}_1 + \hat{P}_1 = 1L$, $\hat{C}_1 = \hat{P}_2$

$\hat{C}_1 + \hat{P}_2 + \hat{B}_2 = 2L$

$2\hat{C}_1 + \hat{B}_2 = 2L$

όμως $\hat{B}_2 = 2L - \hat{B}_1$

$\Rightarrow 2\hat{C}_1 + 2L - \hat{B}_1 = 2L \Rightarrow 2\hat{C}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{C}_1 = \frac{\hat{B}_1}{2}$

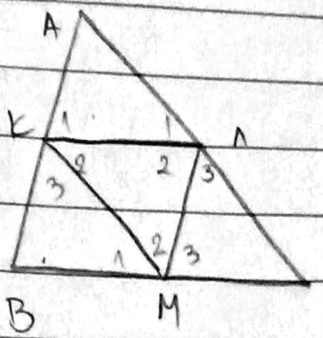
$\hat{D}_1 = \frac{\hat{C}_1}{2} = \frac{\hat{B}_1}{4}$

Θεώρημα: Αν το άθροισμα των γωνιών όλων των τριγώνων, είναι το ίδιο τότε αυτό είναι $2L \underset{\text{προτ. 9}}{\Longrightarrow}$ (αξίωμα παραλληλίας του Ευκλείδη)

Απόδειξη

Θεωρούμε τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών. Έστω ω το άθροισμα των γωνιών του τυχαίου τριγώνου (Θδο $\underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}_{\omega} = 2L$)

Δδο $\omega = 2L$



$A\hat{K}\Lambda: \ \hat{A}+\hat{K}_1+\hat{\Lambda}_1=\omega$

$K\hat{\Lambda}M: \ \hat{K}_2+\hat{\Lambda}_2+\hat{M}_2=\omega$

$B\hat{K}M: \ \hat{K}_3+\hat{M}_1+\hat{B}=\omega$

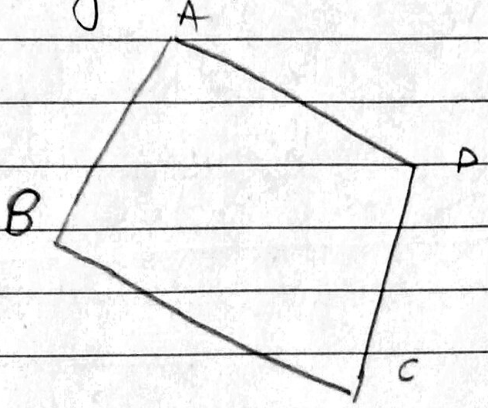
$M\hat{\Lambda}C: \ \hat{\Lambda}_3+\hat{M}_3+\hat{C}=\omega$

$\Longrightarrow$

$\hat{K}_1+\hat{K}_2+\hat{K}_3$

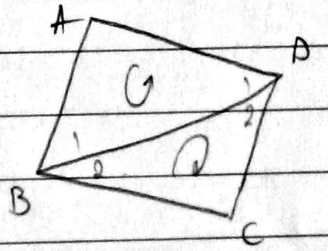
$\Rightarrow 4\omega = (\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) + 2L + 2L + 2L \Rightarrow 4\omega = \omega + 6L \Rightarrow \omega\cdot 3 = 6L \Rightarrow \omega = 2L$

Άσκηση: Δίνεται τετράπλευρο (κυρτό) ώστε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=4L$
$\Rightarrow$ [Ισχύει το αίτημα παραλληλίας του Ευκλείδη]



Θεώρημα (Απολ. Γεωμετρία) Αν υπάρχει ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών $2L$, τότε όλα τα τρίγωνα έχουν το ίδιο άθροισμα, δηλ. $2L$ άρα ισχύει το αίτημα παραλληλίας (μοναδικής παραλληλίας)

Λύση άσκησης



(1) $A+\hat{B}_1+\hat{D}_1 \le 2L$

Επίσης (2): $\hat{B}_2+\hat{D}_2+\hat{C} \le 2L$

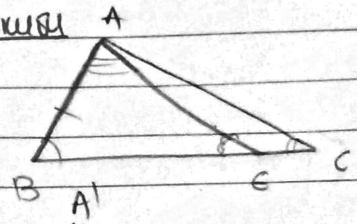
$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} \le 4L$ (3)

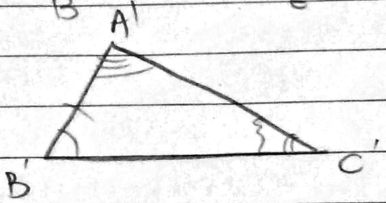
Μπορεί η (1) ή (2) να είναι γνήσια; όχι λόγω της (3)

$\Rightarrow$ Ισότητα της (1), (2)

(1): $\omega(A\hat{B}D) = 2L \xRightarrow{\text{Θεωρ}} \omega(A'\hat{B'}C') = 2L \quad \forall A'B'C'$ τρίγωνο

Άσκηση





4ο Κριτήριο

$\hat{B}=\hat{B}'$
$AB=A'B'$
$\hat{C}=\hat{C}'$

$\left.\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}' \\ AB=A'B' \\ \hat{C}=\hat{C}'\end{matrix}\right\} \overset{\triangle}{ABC}=\overset{\triangle}{A'B'C'}$

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\hat{A}=\hat{A}'$ τότε από το 2ο κριτ. $\Rightarrow$ τρίγωνα ίσα
Έστω $\hat{A}\neq\hat{A}'$ π.χ. $\hat{A}>\hat{A}'$
Φέρνουμε την ευθεία AC: $B\hat{A}E = B'\hat{A}'C'$
Συγκρίνουμε $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ Φανερά ίσα (2ο κριτήριο)
Άρα $A\hat{E}B = \hat{C}' = \hat{C}$ άτοπο!
Αφού $A\hat{E}B$ εξωτερική της $\hat{E}$ στο $\overset{\triangle}{AEC}$